Corrigé

Problème 1 : codage et décodage d'un message chiffré

Partie A : équation diophantienne.

1. On recherche une identité de Bézout à l'aide de l'algorithme d'Euclide généralisé :

$$\mathbf{26} = 1 \times \mathbf{17} + \mathbf{9} \quad (1)$$
$$\mathbf{17} = 1 \times \mathbf{9} + \mathbf{8} \quad (2)$$
$$\mathbf{9} = 1 \times \mathbf{8} + \mathbf{1} \quad (3)$$

que l'on remonte :

$$\begin{aligned}\mathbf{1} &= \mathbf{9} - 1 \times \mathbf{8} \text{ avec } (3)\\ &= \mathbf{9} - 1 \times (\mathbf{17} - 1 \times \mathbf{9}) \text{ avec } (2)\\ &= 2 \times \mathbf{9} - 1 \times \mathbf{17}\\ &= 2 \times (\mathbf{26} - 1 \times \mathbf{17}) - 1 \times \mathbf{17} \text{ avec } (3)\\ &= -3 \times \mathbf{17} + 2 \times \mathbf{26}\end{aligned}$$

Ainsi, on voit que $\boxed{(x, y) = (-3, -2) \text{ est solution particulière de } 17x - 26y = 1}$

2. Supposons que (u, v) soit solution de (E). On a alors

$$17u - 26v = 1 = -3 \times 17 + 2 \times 26$$

et donc $17(u + 3) = 26 \times (v + 2)$. Puisque 17 est premier avec 26, on en déduit, par le lemme de Gauss que 17 divise $v + 2$ et donc $v = 17k - 2$ où $k \in \mathbb{Z}$. On a alors $17 \times (u + 3) = 26 \times 17k$ et donc $u = 26k - 3$. On vient donc de justifier que $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions à (E) vérifie :

$$\mathcal{S} \subseteq \{(26k - 3, 17k - 2) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Réciproquement si $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$17 \times (26k - 3) - 26 \times (17k - 2) = 17 \times 26k - 17 \times 3 - 26 \times 17 \times k + 26 \times 2 = -17 \times 3 + 26 \times 2 = 1$$

d'où

$$\{(26k - 3, 17k - 2) \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{S}$$

et par conséquent :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(26k - 3, 17k - 2) \mid k \in \mathbb{Z}\}}$$

3. Soit (u, v) une solution de E telle que $0 \leq u < 26$. D'après ce qui précède, on peut écrire $u = 26k - 3$ où $k \in \mathbb{Z}$. Si $k \geq 2$, alors $u \geq 49 > 26$ ce qui est impossible et si $k \leq 0$ alors $u \leq -3 < 0$ ce qui est impossible. C'est donc que $k \in]0, 2[$ et puisque $k \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $\boxed{k = 1}$

4. Pour $k = 1$, $(26k - 3, 17k - 2)$ est solution à l'équation (E). Ainsi on a $17 \times 23 + 15 \times 26 = 1$ et donc en passant à la congruence modulo 26, $17 \times 23 \equiv 1 \ [26]$. Ainsi $17 \times p \equiv q \ [26]$ si et seulement si $23 \times 17 \times p \equiv 23 \times q \ [26]$ si et seulement si $\boxed{p \equiv 23q \ [26]}$

Partie B : un exemple de codage.

1. On note ci-dessous le codage (on reprend les notations de l'encadré) :

lettre	n	$f(n)$	r	lettre codée
H	7	141	11	**L**
U	20	362	24	**Y**
I	8	158	2	**C**
T	19	345	7	**H**

Le mot codé est donc $\boxed{\text{LYCH}}$

2. a) On a

$$\begin{aligned} r \equiv f(n)\ [26] &\Leftrightarrow r \equiv 17n + 22\ [26] \\ &\Leftrightarrow r - 22 \equiv 17n\ [26] \\ &\Leftrightarrow 23 \times (r-22) \equiv n\ [26] \text{ avec la question A 4} \\ &\Leftrightarrow n \equiv 23r - 23 \times 22\ [26] \\ &\Leftrightarrow n \equiv 23r - (-3) \times (-4)\ [26] \text{ car } 23 \equiv -3\ [26] \text{ et } 22 \equiv -4\ [26] \\ &\Leftrightarrow n \equiv 23r - 12\ [26] \\ &\Leftrightarrow n \equiv 23r + 14\ [26] \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{g : r \mapsto 23r + 14 \text{ convient}}$

b) On note ci-dessous le décodage :

lettre	r	$g(r)$	n	lettre codée
Q	16	382	18	**S**
W	22	520	0	**A**
X	23	543	23	**X**
A	0	14	14	**O**

Le mot décodé est donc $\boxed{\text{SAXO}}$

Partie C : cas général.

1. Supposons que $f(n_1) \equiv f(n_2)\ [26]$, on a alors $an_1 + b \equiv an_2 + b\ [26]$ et donc $a(n_1 - n_2) \equiv 0$ 26. Ainsi 26 divise $a \times (n_1 - n_2)$ et puisque 26 est premier avec a, on en déduit que 26 divise $n_1 - n_2$. Enfin, $n_1 - n_2 \in]-26, 26[$ puisque $0 \leq n_1 < 26$ et $0 \leq n_2 < 26$. Puisque l'unique multiple de 26 dans $]-26, 26[$ est 0, on en déduit que $n_1 - n_2 = 0$ et donc $\boxed{n_1 = n_2}$

2. a) Si a et 26 sont premiers entre eux alors, on peut trouver une identité de Bézout liant a et 26 : il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$u \times a + v \times 26 = 1 \text{ et donc } \boxed{u \times a \equiv 1\ [26]}$$

b) On sait qu'une telle fonction de décodage g existe. On a

$$\begin{aligned} r \equiv f(g(r))\ [26] &\Leftrightarrow r \equiv ag(r) + b\ [26] \\ &\Leftrightarrow r - b \equiv ag(r)\ [26] \\ &\Leftrightarrow g(r) \equiv ur - ub\ [26] \text{ avec la question a)} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{g : r \mapsto ur - ub \text{ convient}}$

c) $\boxed{\text{Non}}$ Au vu de la définition g est définie sur les entiers donc g et $g+26$ sont deux fonctions différentes. De plus si g est une fonction de décodage pour f, puisque l'on travaille modulo 26, $g + 26$ en est évidemment une autre.

Problème 2 : géométrie dans l'espace

1. a) Le point I est milieu de $C(4;4;0)$ et $G(4;4;4)$ ainsi I a pour coordonnées :

$$\left(\frac{4+4}{2};\frac{4+4}{2};\frac{0+4}{2}\right) = \boxed{(4;4;2)}$$

b) Le vecteur $\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées $(4-4;4-0;2-0) = (0;4;2)$. Le point le plus général de la droite (BI) est de la forme $B + t\overrightarrow{BI}$ où $t \in \mathbb{R}$ et aura donc pour coordonnées $(4;4t;2t)$ et la représentation paramétrique recherchée est donc

$$\boxed{\begin{cases} x &=& 4 & \\ y &=& 4t & \text{où } t \in \mathbb{R} \\ z &=& 2t & \end{cases}}$$

c) Notons $(x_K;y_K;z_K)$ les coordonnées du point K. Puisque $K \in (BI)$, il existe, d'après la question précédente, $t \in \mathbb{R}$ tel que $x_K = 4$, $y_K = 4t$ et $z_K = 2t$. De plus $K \in (EJ)$, il existe donc $s \in \mathbb{R}$ tel que $x_K = 2s$, $y_K = 4s$ et $z = 4$ par conséquent $4 = 2s$ et $4 = 2t$ d'où $s = 2$ et $t = 2$ et le point K a donc pour coordonnées $\boxed{(4;8;4)}$

d) D'une part, on a

$$\langle\overrightarrow{KE},\overrightarrow{KB}\rangle = \|\overrightarrow{KE}\| \times \|\overrightarrow{KB}\| \times \cos(\widehat{BKE})$$

Puisque $\overrightarrow{KE}(4;8;0)$ et $\overrightarrow{KB}(0;8;4)$, on en déduit que

$$\|\overrightarrow{KE}\| = \sqrt{4^2+8^2+0} = \sqrt{80} \text{ et } \|\overrightarrow{KB}\| = \sqrt{0^2+8^2+4^2} = \sqrt{80}.$$

Ainsi

$$\langle\overrightarrow{KE},\overrightarrow{KB}\rangle = 80 \times \cos(\widehat{BKE}).$$

D'autre part,

$$\langle\overrightarrow{KE},\overrightarrow{KB}\rangle = 4 \times 0 + 8 \times 8 + 0 \times 4 = 64$$

Ainsi

$$\cos(\widehat{BKE}) = \frac{64}{80}$$

et donc, avec la calculatrice :

$$\boxed{\widehat{BKE} \approx 37^o}$$

2. a) La direction du plan (BIJ) est engendrée par les vecteurs $\overrightarrow{KE}$ et $\overrightarrow{KB}$. Ainsi $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BIJ) si et seulement s'il est orthogonal à $\overrightarrow{KE}$ et $\overrightarrow{KB}$. Or

$$\langle\overrightarrow{n},\overrightarrow{KE}\rangle = 2 \times 4 + (-1) \times 8 + 2 \times 0 = 0$$
$$\langle\overrightarrow{n},\overrightarrow{KB}\rangle = 2 \times 4 + (-1) \times 8 + 2 \times 0 = 0$$

donc $\boxed{\overrightarrow{n} \text{ est un vecteur normal au plan } (BIJ)}$

b) Puisque $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (BIJ) (question précédente), un point $M(x;y;z)$ quelconque est dans le plan si et seulement si $\langle\overrightarrow{BM},\overrightarrow{n}\rangle = 0$ si et seulement si $(x-4) \times 2 + (y-0) \times (-1) + (z-0) \times 2 = 0$ si et seulement si $\boxed{2x - y + 2z - 8 = 0}$

3. a) La droite Δ est la droite passant par D et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$. Le point le plus général de la droite Δ est de la forme $D + t\overrightarrow{n}$ où $t \in \mathbb{R}$ et aura donc pour coordonnées $(2t;4-t;2t)$ et la représentation paramétrique recherchée est donc

$$\boxed{\begin{cases} x &=& 2t & \\ y &=& 4-t & \text{où } t \in \mathbb{R} \\ z &=& 2t & \end{cases}}$$

b) Puisque $N \in \Delta$, il existe, d'après la question précédente, $t \in \mathbb{R}$ tel que les coordonnées de N soient $(2t; 4-t; 2t)$. Puisque $N \in (BIJ)$, on aura d'après la question 2b), $2 \times (2t) - (4-t) + 2 \times (2t) - 8 = 0$ donc $9t - 12 = 0$ et donc $t = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$. Par conséquent, N a pour coordonnées $\boxed{\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)}$

c) On sait que la distance de D à (BIJ) est donnée par la distance de D au projeté orthogonal de D sur (BIJ) qui est N. Ainsi la distance recherchée est :

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{DN}\| &= \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 4\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} \\
&= \sqrt{3 \times \left(\frac{8}{3}\right)^2} \\
&= \sqrt{3} \times \frac{8}{3} \\
&= \boxed{\frac{8}{\sqrt{3}}}
\end{aligned}$$

4. a) Par définition $M = E + s\overrightarrow{EJ}$. Par conséquent les coordonnées de M sont

$$(2s; 4s; 4)$$

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{DM}$ a pour coordonnées $(2s; 4s-4; 4)$ et donc

$$\begin{aligned}
DM^2 &= \|\overrightarrow{DM}\|^2 \\
&= (2s)^2 + (4s-4)^2 + 4^2 \\
&= 4s^2 + 16s^2 - 32s + 16 + 16 \\
&= \boxed{20s^2 - 32s + 32}
\end{aligned}$$

Notons $f : s \mapsto 20s^2 - 32s + 32$, on a alors f dérivable car c'est un polynôme et pour $s \in \mathbb{R}$, $f'(s) = 40s - 32$. Ainsi $f'(s) \geq 0$ si et seulement si $40s \geq 32$ si et seulement si $s \geq \frac{4}{5}$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{\text{Le minimum pour } DM \text{ est donc obtenu en } s = \frac{4}{5}}$

b) Le point M a pour coordonnées $(2s; 4s-4; 4)$ (comme vu plus haut). Le point M aura donc pour coordonnées $\boxed{\left(\frac{8}{5}; -\frac{4}{5}; 4\right)}$

Problème 3 : fonctions

Partie A : la représentation graphique

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = 2(x+1)e^{-x} + (x+1)^2 \times (-e^{-x}) = e^{-x}(2x+2-(x+1)^2) = \boxed{(1-x^2)e^{-x}}$$

2. Pour $x \geq 1$, $x^2 \geq 1^2$ (par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$). De plus $e^{-x} > 0$. Ainsi, avec la formule de la question précédente, $f'(x) \leq 0$ et donc $\boxed{f \text{ est décroissante sur } [1, +\infty[}$

3. a) La tangente à f au point $(x, f(x))$ a pour coefficient directeur $f'(x)$. Pour que la tangente soit parallèle à l'axe des abscisses il faut que son coefficient directeur soit égal à 0. Ainsi on recherche le point B de coordonnées $(x, f(x))$ avec $x \geq 0$ tel que $f'(x) = 0$. Or $f'(x) = 0$ si et seulement si $(1-x^2)e^{-x} = 0$ (par la question a)) si et seulement si $1 - x^2 = 0$ car $e^{-x} > 0$ si et seulement si $(1-x)(1+x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ ou $x = -1$ si et seulement si $x = 1$ car $x \geq 0$. Par conséquent le point B a pour coordonnées $\boxed{\left(1, \frac{4}{e}\right)}$

   b) Le coefficient directeur de la tangente à (C) au point B est $f'(1) = 0$ et doit passer par le point $\left(1, \frac{4}{e}\right)$. Ainsi l'équation de cette tangente est donnée $y = 0 \times (x-1) + \frac{4}{e}$ c'est donc $\boxed{y = \frac{4}{e}}$

4. a) Le point J est d'abscisse 0 car il est sur l'axe des ordonnées. Puisqu'il est sur la courbe on en déduit que ses coordonnées sont $(0, f(0)) = \boxed{(0,1)}$

   b) Commençons par déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point J. On a $f'(0) = 1$. Ainsi l'équation est donnée par $y = 1 \times (x-0) + 1$ et donc l'équation est $y = x+1$. Puisque $0 = -1+1$, on en déduit que $\boxed{\text{le point } A \text{ de coordonnées } (-1, 0) \text{ appartient bien à cette tangente } (T)}$

   c) Puisque les droites d'équation $y = x+1$ et $y = x$ ont même coefficient directeur, à savoir 1, on en déduit qu'elles sont parallèles. Puisque la première est l'équation de la tangente (T) et la seconde l'équation de la tangente (Δ), on en déduit que $\boxed{(T) \text{ est bien parallèle à la droite } (\Delta)}$

5. Remarquons que par croissances comparées :

$$\lim_{x \to +\infty} (x+1)^2 e^{-x} = 0$$

   Ainsi, la courbe $\boxed{(C) \text{ admet une asymptote horizontale en } +\infty}$, à savoir la droite d'équation $y = 0$.

Partie B : recherche de l'intersection de la courbe (C) avec la droite (Δ)

1. Avec la calculatrice, on obtient immédiatement $\boxed{f(1) \approx 1.47 \text{ et } f(3/2) \approx 1.39}$

2. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $u_n \in [1, 3/2]$.
   — **Initialisation** On a $u_0 = 3/2 \in [1, 3/2]$.
   — **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in [1, 3/2]$. On a donc $1 \leq u_n \leq 3/2$ par hypothèse de récurrence. Puisque f est décroissante sur $[1, +\infty[$ avec la question A 2, on en déduit que $f(3/2) \leq f(u_n) = u_{n+1} \leq f(1)$. Puisque les approximations de la question 1 sont à 0.01 près, on en déduit que $f(1) < 1.48 \leq 3/2$ et $f(3/2) > 1.38 \geq 1$ et donc $1 \leq u_{n+1} \leq 3/2$.
   D'où la conclusion par récurrence : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)}$

3. a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $|u_{n+1} - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
   — **Initialisation** On a $u_1 = f(u_0) = f(3/2) \approx 1.39$ et $1 \leq x_0 \leq \frac{3}{2}$. En particulier u_1 et x_0 sont dans l'intervalle $[1, 3/2]$ qui est de longueur $\frac{1}{2}$ et donc $|u_1 - x_0| \leq \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}$

— **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{n+1} - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. On a

$$\begin{aligned} |u_{n+2} - x_0| &\leq \frac{1}{2}|u_{n+1} - x_0| \text{ avec l'inégalité admise} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \end{aligned}$$

D'où la conclusion par récurrence : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$

b) On a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq |u_{n+1} - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ donc, par encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_{n+1} - x_0|$ ainsi la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et la suite $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge donc vers } 0}$

4. a) Il y a deux cas à considérer :
   — Supposons que $u_n \geq x_0$ on a alors, par décroissance de f, $f(u_n) \leq f(x_0)$ c'est-à-dire $\boxed{u_{n+1} \leq x_0}$
   — Sinon $u_n \leq x_0$ et on a alors, par décroissance de f, $f(u_n) \geq f(x_0)$ c'est-à-dire $\boxed{u_{n+1} \geq x_0}$

   Dans les deux cas, $\boxed{u_n - x_0 \text{ et } u_{n+1} - x_0 \text{ sont de signe opposé}}$

   b) *Remarque : il y a un peu de liberté dans ce qu'on entend par "donner tous les termes de la suite" je décide donc de créer une fonction renvoyant la liste de tous les éléments de* 0 *à* $n-1$

```python
import numpy as np
def CAPES2025MayotteEp1(n):
    """Entrée : entier naturel n
       Sortie : liste [u_0,...,u_{n-1}]"""

    #fonction f telle que u_{n+1}=f(u_n)
    def f(x):
        return (x+1)**2*np.exp(-x)

    L=[3/2] # Liste de tous les éléments de la suite
    for k in range(n-1):
        L.append(f(L[-1]))

    return L
```

   c) On a en appliquant la fonction avec $n = 5$:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1.5 \\ u_1 & \approx & 1.39456 \\ u_2 & \approx & 1.42168 \\ u_3 & \approx & 1.41516 \\ u_4 & \approx & 1.41676 \end{array}}$$

   d) puisque $x_0 \leq 3/2$, $x_0 \leq u_0$ puis, avec la question a, $u_1 \leq x_0$, $x_0 \leq u_2$, $u_3 \leq x_0$ et $x_0 \leq u_4$ de telle sorte que $1.41516 \leq x_0 \leq 1.41676$ et donc $\boxed{x_0 \approx 1.416}$

5.

Partie C : un calcule d'aire.

1. Remarquons que $v : x \mapsto (x+1)^2$ et $u : x \mapsto -e^{-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $v'(x) = 2(x+1)$, $u'(x) = e^{-x}$:

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^0 f(x)dx &= \int_\alpha^0 u'(x)v(x)dx \\
&= [-(x+1)^2e^{-x}]_\alpha^0 + 2\int_\alpha^0 (x+1)e^{-x}dx \text{ par intégration par parties} \\
&= (\alpha+1)^2e^{-\alpha} - 1 + 2\int_\alpha^0 (x+1)e^{-x}dx \\
&= (\alpha+1)^2e^{-\alpha} - 1 + 2\left([-(x+1)e^{-x}]_\alpha^0 + \int_\alpha^0 e^{-x}dx\right) \text{ par IPP} \\
&= (\alpha+1)^2e^{-\alpha} - 1 + 2(\alpha+1)e^{-\alpha} - 2 + 2[-e^{-x}]_\alpha^0 \\
&= (\alpha+1)^2e^{-\alpha} - 1 + 2(\alpha+1)e^{-\alpha} - 2 + 2e^{-\alpha} - 2 \\
&= \boxed{e^{-\alpha}(\alpha^2+4\alpha+5) - 5}
\end{aligned}$$

2. Pour $\alpha = -1$, on applique la formule précédente et l'on obtient donc

$$\boxed{\int_{-1}^0 f(x)dx = 2e - 5}$$

3. a) On a $\mathcal{A} = 5$ si et seulement si $e^{-\alpha}(\alpha^2+4\alpha+5) - 5 = 5$ par la question 1 si et seulement si $\boxed{e^{-\alpha}(\alpha^2+4\alpha+5) = 10}$

   b) Notons $g : x \mapsto e^{-x}(x^2+4x+5)$. La fonction g est dérivable car produit de fonctions dérivables et pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = -e^{-x}(x^2+4x+5) + e^{-x}(2x+4) = e^{-x}(-x^2-2x-1) = -e^{-x}(x+1)^2$$

   Remarque : il n'est pas étonnant de retrouver $-f$ car $-g(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)dx$ dont la dérivée par rapport à α est $f(\alpha)$ grâce au théorème fondamental de l'analyse

   Par conséquent $g'(x) \leq 0$ avec égalité si et seulement si $x = -1$. Ainsi g est strictement décroissante. De plus g est continue sur $\mathbb{R}$. Enfin il est clair que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ par croissances comparées. Ainsi, $\boxed{\text{il existe un unique } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } e^{-x}(x^2+4x+5) = 10}$ par le théorème de la bijection.

   c) On exécute le code :

```
x=0
def g(x):
    return np.exp(-x)*(x**2+4*x+5)
while g(x)<10:
    x=x-0.01
x
```

   et l'on obtient $\boxed{\alpha \approx -2.25}$